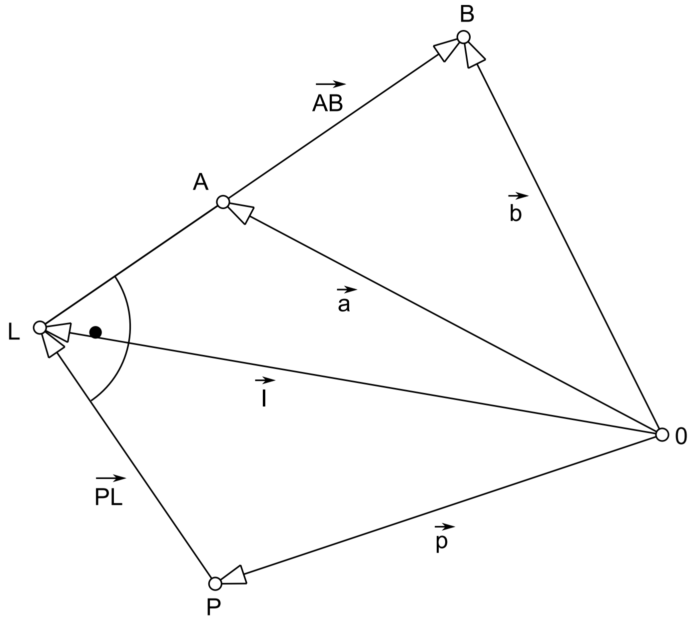
Magnetfeldberechnung

Frank Buß

3. Januar 2009

Lotfußberechnung

Zur Berechnung des Magnetfeldes in einem Punkt leiten wir zunächst eine allgemeine Formel her, um einen Lotfußpunkt zu berechnen.



Gegeben sind die Punkt A, B und P. Gesucht ist der Lotfußpunkt L, der auf der Geraden liegt, die durch die Punkte A und B geht, sowie der auf der Geraden liegt, die durch P geht und die senkrecht zur Geraden durch A und B ist. Eine Bedingung dazu ist, daß das Skalarprodut der beiden Geraden Null ist:

$$\overrightarrow{PL} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \tag{1}$$

Wir können nun die Gerade durch die beiden Punkte A und B folgendermaßen beschreiben:

$$\vec{l} = \vec{a} + k \cdot \overrightarrow{AB} \tag{2}$$

Da $\vec{p} + \overrightarrow{PL} = \vec{l}$ ist, also $\overrightarrow{PL} = \vec{l} - \vec{p}$ können wir das in Gleichung (1) einsetzen und erhalten:

$$(\vec{l} - \vec{p}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \tag{3}$$

Setzen wir jetzt die Definition für $\vec{l}$ aus Gleichung (2) in Gleichung (3) ein, dann ergibt sich:

$$(\vec{a} + k \cdot \overrightarrow{AB} - \vec{p}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \tag{4}$$

Für den Fall $\mathbb{R}^3$ und der Defintion $A = (A_x, A_y, A_z)$, $B = (B_x, B_y, B_z)$ und $P = (P_x, P_y, P_z)$, ergibt sich für k folgende Formel:

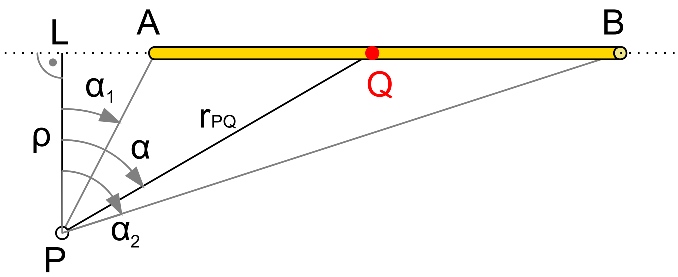
$$k = \frac{A_x^2 + A_y^2 + B_x P_x - A_x(B_x + P_x) + B_y P_y - A_y(B_y + P_y) + (A_z - B_z)(A_z - P_z)}{(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2} \tag{5}$$

Somit läßt sich der Ortsvektor $\vec{l}$ zum Punkt L wie folgt berechnen:

$$\vec{l} = \begin{pmatrix} A_x + k \cdot (B_x - A_x) \\ A_y + k \cdot (B_y - A_y) \\ A_z + k \cdot (B_z - A_z) \end{pmatrix} \tag{6}$$

Gerader Linienleiter

Nun betrachten wir einen geraden Leiter und berechnen das Magnetfeld im Punkt P (nach Wikipedia [1]).



Das vektorielle Magnetfeld wird folgendermaßen berechnet:

$$\mathbf{B}\,(\mathbf{P}) = \frac{\mu_0\,\mathbf{I}}{4\,\pi\,\rho}\,(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)\,\vec{e}_a \tag{7}$$

Mit $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7} N\cdot A^{-2}$
$\vec{e}_a$ ist der Einheitsvektor senkrecht zur Ebene, in der P und der Leiter liegen, also

$$\vec{e}_a = \frac{\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}}{\left|\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}\right|} \tag{8}$$

Um den Winkel zwischen zwei Vektoren zu berechnen, kann das Skalarprodukt verwendet werden:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos(\theta) \tag{9}$$

Daraus folgt:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right) \tag{10}$$

Für $\mathbb{R}^3$ gilt außerdem:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{11}$$

Somit kann α_1 wie folgt bestimmt werden:

$$\alpha_1 = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{PL}\cdot\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PL}||\overrightarrow{PA}|}\right) \tag{12}$$

und α_2:

$$\alpha_2 = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{PL}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PL}||\overrightarrow{PB}|}\right) \tag{13}$$

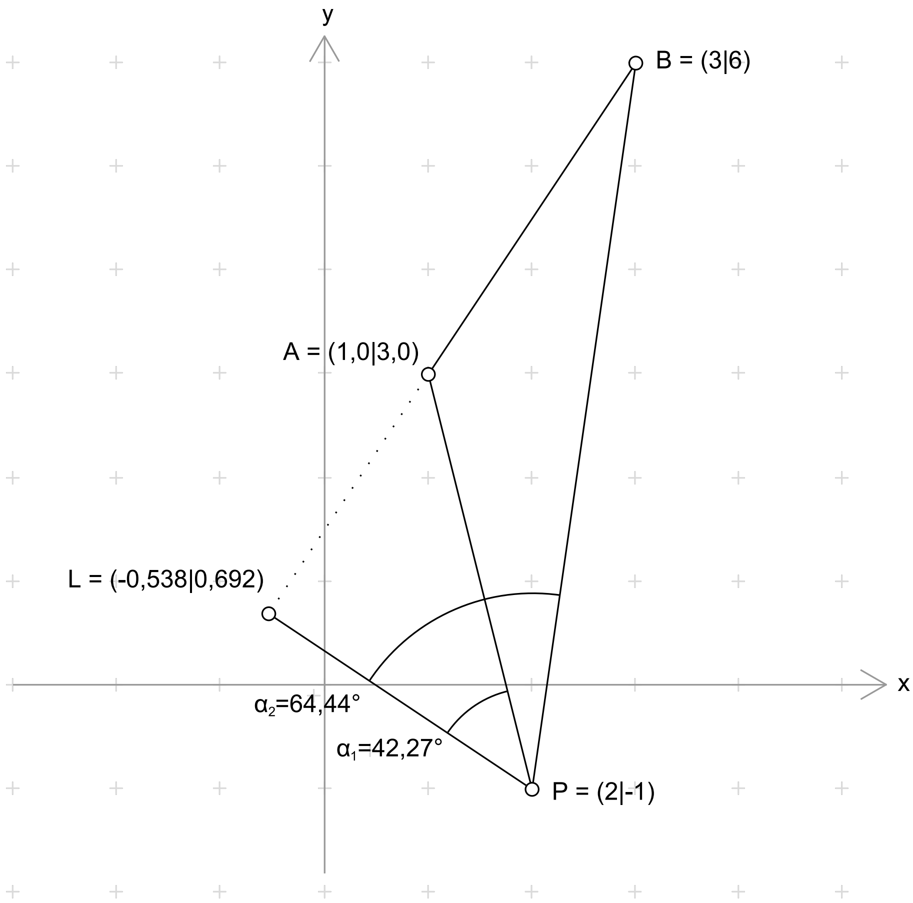
Zu beachten ist hier allerdings, daß α_1 immer den eingeschlossenen Winkel bezeichnet, sodaß es negiert werden muß, falls $k > 0$ ist und α_2 muß negiert werden, wenn $k > 1$ ist.

Für eine genauere Berechnung kann das noch weiter vereinfachen, indem man ausnutzt, daß $sin(arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$ gilt, sowie $sin(-arccos(x)) = -\sqrt{1-x^2}$, da dann der Term einfacher ist und keine trigonometrischen Funktionen mehr vorkommen, die speziell an den Rändern zu $0°$ usw., ungenauer sein können, als der vereinfachte Term.

[1] http://de.wikipedia.org/wiki/Biot-Savart-Gesetz

Beispiel

Ein Beispiel für den geraden Linienleiter, zur leichteren Darstellung mit z=0:



Wegen $z = 0$ gilt:

$$\vec{e}_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Wenn also ein Strom von 1 A fließt, dann können wir in P eine magnetische Flußdichte von ca. 7,5 Nanotesla messen.