Interessante Formeln für π

Frank Buß

6. Januar 2000

Leibniz, 1674:

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots\right) \tag{1}$$

Euler, 1738:

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \pi = -i\ln(-1) \tag{2}$$

Euler, 1738:

$$\pi = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \tag{3}$$

Bei der folgenden Formel von Euler sind die Zähler die ungeraden Primzahlen und die Nenner sind gerade, nicht durch 4 teilbare Zahlen, die sich um 1 von den Zählern unterscheiden:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{19}{18}\cdots \tag{4}$$

Rabinowitz und Wagon, 1995:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!^2 2^{n+1}}{(2n+1)!} = 2 + \frac{1}{3}\left(2 + \frac{2}{5}\left(2 + \frac{3}{7}\left(2 + \frac{4}{9}(2 + \cdots)\right)\right)\right) \tag{5}$$

Viète, 1593:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}\cdots \tag{6}$$

Brouncker, 1658:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cdots}}}} \tag{7}$$